EXERCICE N°1 : 40' 6 points

1) Calculer les primitives des fonctions suivantes : $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1$; $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x^2}$; $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$; $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{x^2}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x+4}}$; $f(x) = (2x-1)(2x^2 - 2x)^4$; $f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^3}$; $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^3}$; $f(x) = \frac{x^4}{\left(\sqrt[4]{x^5}+1\right)^3}$; $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x \cdot tg^3 x}$; $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos 2x}$; $f(x) = tg\,x + tg^3 x$; $f(x) = \sin^5 x - \cos^4 x$; $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) Soit $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 5}{(x-1)^2}$. Déterminer a, b et c tq $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$. Déduire une primitive de f

3) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x + \sqrt{x^2+1}$. Exprimer $\sqrt{x^2+1}$ à l'aide de u(x) et u'(x).

En déduire des primitives pour les fonctions : $f(x) = \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$ et $g(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

EXERCICE N°2 : 25' 4 points

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$. Soit F la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en $\sqrt{2}$.

1) Montrer que F est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. En déduire le signe de F(x) sur $]1, +\infty[$.

2) Soit G la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = F\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, $G(x) = x - \frac{\pi}{4}$. Calculer alors F(2).

EXERCICE N°3 : 25' 5 points

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$.

1) a) Montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[0, \sqrt{2}]$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $[0, \sqrt{2}[$ et expliciter sa fonction dérivée.

2) Soit la fonction g définie sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ par $g(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$. On note G sa primitive qui s'annule en 0.

a) Montrer que G est impaire.

b) Montrer que pour tout x de $[0, \sqrt{2}[$, $G(x) = \pi - f^{-1}(x)$. En déduire G(1).

EXERCICE N°4 : 25' 5 points

Soit f la fonction définie sur [-2,2] par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

1) a) Montrer que f admet au moins une primitive sur [-2,2].

b) Soit F la primitive de f sur [-2,2] qui s'annule en 0. Etudier la parité de F.

2) Soit G la fonction définie sur $[0, \pi]$, par $G(x) = F(2 \cos x)$ et ζ_G sa courbe représentative.

a) Montrer que le point $I(\pi/2 , 0)$ est un centre de symétrie de ζ_G.

b) Montrer que pour tout x de $[0, \pi]$, $G(x) = \pi - 2x + \sin(2x)$. En déduire F(1), F(2) et $F(\sqrt{2})$.

EXERCICE N°5 : 35' 6 points

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $f(x) = \tan^2(\frac{x}{2})$.

1) a) Montrer que $\forall x \in [0, \pi[\ : \ f'(x) = \tan(\frac{x}{2})(1 + \tan^2(\frac{x}{2}))$.

b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

c) Calculer $f^{-1}(1)$.

2) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J et calculer $(f^{-1})'$.

3) Déterminer la primitive F de f sur $[0,\pi[$ tel que $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

4) Pour tout $x > 1$, on pose $g(x) = \dfrac{-2}{x\sqrt{x^2-1}}$

a) Montrer que g admet une seule primitive G sur $]1, +\infty[$ tel que $G(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$.

b) Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $\psi(x) = f^{-1}(x^2-1)$. Montrer que $\psi'(x) = - g(x)$.

c) En déduire que $\forall x \in]1, +\infty[\ : \ G(x) = \pi - f^{-1}(x^2-1)$.

5) Soit $h(x) = \dfrac{1 + x^2}{x\sqrt{x^2-1}}$, $\forall x \in]1, +\infty[$.

a) Déterminer en fonction de f^{-1} la primitive H de h sur $]1, +\infty[$ tel que $H(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} + 1$.

b) Dresser le tableau de variation de H.